احتمال مهندسی

فصل پنجم: متغیر تصادفی پیوسته

سید مهدی سجادیه

متغیر تصادفی پیوسته

- متغیرهای که مقادیر آنها شمارش ناپذیر است
  - زمان رسیدن به ایستگاه قطار
  - انتخاب عددی بین صفر ویک

- احتمال در یک نقطه صفر است

- اصولا فاصله مهم است نه یک نقطه

تابع چگالی احتمال

- X یک متغیر تصادفی پیوسته (یک بعدی) است اگر تابع غیر منفی $f_X(x)$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر زیر مجموعه B از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$P\{X \in B\} = \int_{x \in B} f_X(x)dx$$

- به تابع $f_X(x)$، تابع چگالی احتمال گوییم.
- ویژگی های تابع چگالی احتمال
- ۱– $f_X(x)$ تابع غیر منفی

$$2-\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$3-P\{a \le X \le b\} = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

تابع توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس

- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی پیوسته (جمع تبدیل به انتگرال می شود)

$$F_X(a) = P\{X \le a\} = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P\{a < X < B\} = F_X(b) - F_X(a)$$

- امید ریاضی

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx, \qquad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

- واریانس

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx - (\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx)^2$$

- تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

مثال:

- Suppose $f(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in [0,2] \\ 0 & x \notin [0,2]. \end{cases}$
- What is $P\{X < 3/2\}$?
- What is $P\{X = 3/2\}$?
- What is $P\{1/2 < X < 3/2\}$?
- What is $P\{X \in (0,1) \cup (3/2,5)\}$?
- What is F?
- $F(a) = F_X(a) = \begin{cases} 0 & a \leq 0 \\ a/2 & 0 < a < 2 \\ 1 & a \geq 2 \end{cases}$
- In general $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(x)$.

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(4x-2x^2) & 0 \le x \le 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الف) مقدار c را به دست آورید. ب) P{X>1.5} را محاسبه کنید.

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{2} c(4x-2x^2)dx}_{c(2x^2-\frac{2x^3}{3})|_0^2 = c*\frac{8}{3}} + \int_{2}^{\infty} 0dx = \frac{8c}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

ب)

$$P\{X > 1.5\} = \int_{1.5}^{2} \frac{3}{8}(4x-2x^2)dx = \frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})|_{1.5}^{2} =$$

$$\frac{3}{8}(2x^2 - \frac{2x^3}{3})|_{1.5}^{2} = \frac{3}{8}*(8-\frac{16}{3}-(2*(1.5)^2 - \frac{2(1.5)^3}{3}) = \dots$$

مثال

- مدت زمان کارکرد یک کامپیوتر بر حسب ساعت به صورت زیر است:

$$f_X(x)=\begin{cases} ce^{\frac{-x}{100}} & 0\le x \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

الف) مقدار c را به دست آورید. ب)با چه احتمالی کامپیوتر بین ۵۰ تا ۱۵۰ ساعت کار می کند. پ) امید ریاضی X را به دست آورید.

حل: الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dx}_{0}+\int_{0}^{\infty} ce^{\frac{-x}{100}}dx=c(-100)e^{\frac{-x}{100}}\Big|_0^{\infty}=1\Rightarrow 100c=1\Rightarrow c=\frac{1}{100}$$

ب)

$$P\{50<X<150\}=\int_{50}^{150}\frac{1}{100}e^{-\frac{x}{100}}dx=-e^{-\frac{x}{100}}\Big|_{50}^{150}=e^{-0.5}-e^{1.5}=\dots$$

ادامه حل مثال

- پ)یادآوری روش نردبانی در انتگرال $\int f(x)g(x)dx$

$f(x)$ ومشتقاتش		$g(x)$ وانتگرال هایش
x^2	$+$	e^x
$2x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0		e^x

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

- برای محاسبه E[X] داریم:

$\frac{x}{100}$	$+$	$e^{\frac{-x}{100}}$
$\frac{1}{100}$	$-$	$-100e^{\frac{-x}{100}}$
0		$(-100)^2 e^{\frac{-x}{100}}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x*0dx}_{0} + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{100} e^{\frac{-x}{100}} dx =$$

$$\left\langle \frac{x}{100}(-100e^{\frac{-x}{100}}) - \frac{1}{100}((-100)^2 e^{\frac{-x}{100}}) \right\rangle_0^{\infty} = 100$$

مثال(ارشد ۸۶)

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین ۱,۲۵ و تابع چگالی زیر باشد a+b را محاسبه کنید.

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ b & 1 \le x \le a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

مثال(ارشد ۸۶)

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین ۱,۲۵ و تابع چگالی زیر باشد a+b را محاسبه کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ b & 1\le x\le a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- حل: علاوه بر امید ریاضی که مشخص است باید انتگرال تابع چگالی برابر ۱ باشد

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^a bdx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+bx\Big|_1^a=\frac{1}{3}+b(a-1)\Rightarrow\frac{2}{3}=b(a-1)\qquad\Delta$$

$$1.25=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^a bxdx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{bx^2}{2}\Big|_1^a=\frac{1}{4}+\frac{b}{2}(a^2-1)\Rightarrow 1=\frac{b}{2}(a^2-1)\quad\Delta\Delta$$

مثال(ارشد ۸۶)

- اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین ۱,۲۵ و تابع چگالی زیر باشد a+b را محاسبه کنید.

$$f_X(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ b & 1\le x\le a \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- **حل**: علاوه بر امید ریاضی که مشخص است باید انتگرال تابع چگالی برابر ۱ باشد

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^a bdx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+bx\Big|_1^a=\frac{1}{3}+b(a-1)\Rightarrow\frac{2}{3}=b(a-1) \qquad \Delta$$

$$1.25=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^a bxdx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{bx^2}{2}\Big|_1^a=\frac{1}{4}+\frac{b}{2}(a^2-1)\Rightarrow 1=\frac{b}{2}(a^2-1) \quad \Delta\Delta$$

- با تقسیم رابطه دوم بر رابطه اول داریم:

$$\frac{\frac{b}{2}(a^2-1)}{b(a-1)}=\frac{1}{2/3}\Rightarrow\frac{a+1}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow a=2\Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

یادآوری

متغیر تصادفی گسسته	
تابع توزیع تجمعی	$F_X(t)$
تابع جرم احتمال	$p_X(x)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک بازه	$P\{X \in A\} = \sum_{x \in A} p_X(x)$
محاسبه‌ی تابع توزیع تجمعی	$F_X(t) = \sum_{x \le t} p_X(x)$

متغیر تصادفی پیوسته	
تابع توزیع تجمعی	$F_X(t)$
تابع چگالی احتمال	$f_X(x)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک بازه	$\Pr\{X \in A\} = \int_A f_X(x)dx$
محاسبه‌ی تابع توزیع تجمعی	$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$

متغیرهای تصادفی پیوسته مهم

- متغیر تصادفی یکنواخت

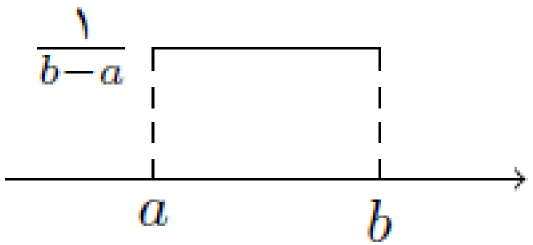
- متغیر تصادفی نرمال

- متغیر تصادفی نمایی

متغیر تصادفی یکنواخت

- تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت (U[a,b])

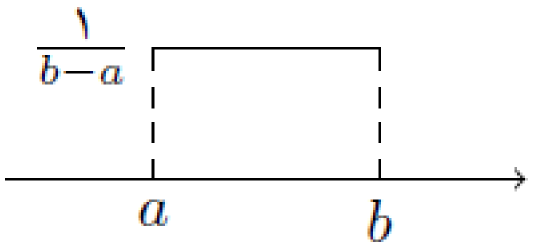
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



متغیر تصادفی یکنواخت

- تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت (U[a,b])

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



- تابع توزیع تجمعی

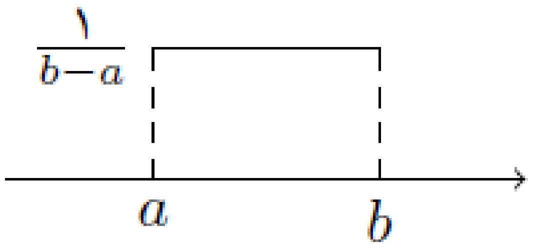
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x < b \end{cases}$$

-

متغیر تصادفی یکنواخت

- **تابع چگالی متغیر تصادفی یکنواخت (U[a,b])**

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



- **تابع توزیع تجمعی**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x < b \end{cases}$$

- **امید ریاضی**
-

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{\frac{x^2}{2}}{b-a}\Big|_a^b = \frac{\frac{b^2-a^2}{2}}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

متغیر تصادفی یکنواخت

- واریانس

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_x(x)dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{\frac{x^3}{3}}{b-a}\Big|_a^b=\frac{\frac{b^3-a^3}{3}}{b-a}=\frac{b^2+a^2+ba}{3}$$

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

متغیر تصادفی یکنواخت

- واریانس

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_x(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{\frac{x^3}{3}}{b-a}\Big|_a^b=\frac{\frac{b^3-a^3}{3}}{b-a}=\frac{b^2+a^2+ba}{3}$$

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

- **مثال: اگر X به طور یکنواخت در فاصله (۱۰و۰) توزیع شده باشد مطلوب است احتمال های زیر:**
- **X<3**
- **X>6**
- **3<X<8**
- **-1<X<4**

متغیر تصادفی یکنواخت

- واریانس

$$E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_x(x)dx=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx=\frac{\frac{x^3}{3}}{b-a}\Big|_a^b=\frac{\frac{b^3-a^3}{3}}{b-a}=\frac{b^2+a^2+ba}{3}$$

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

- **مثال**: اگر X به طور یکنواخت در فاصله (۱۰و۰) توزیع شده باشد مطلوب است احتمال های زیر:

- X<3 $\quad \frac{3}{10}$
- X>6 $\quad \frac{10-6}{10}=\frac{4}{10}$
- 3<X<8 $\quad \frac{8-3}{10}=\frac{5}{10}$
- -1<X<4 $\quad$ ($-1<X<0$ حذف) $\quad \frac{4-0}{10}=\frac{4}{10}$

مثال

- فرض کنید اتوبوس از ایستگاهی در ساعات ۷:۱۵ و ۷:۳۰ حرکن می کند. اگر زمان رسیدن شخصی به ایستگاه اتوبوس یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد احتمال آن را پیدا کنید که وی
- الف) کمتر از ۳ دقیقه معطل شود.
- ب) بیش از ۱۰ دقیقه معطل شود.

مثال

- فرض کنید اتوبوس از ایستگاهی در ساعات ۷:۱۵ و ۷:۳۰ حرکن می کند. اگر زمان رسیدن شخصی به ایستگاه اتوبوس یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد احتمال آن را پیدا کنید که وی
- الف) کمتر از ۳ دقیقه معطل شود.
- ب) بیش از ۱۰ دقیقه معطل شود.
- حل:الف) در این حالت باید شخص در بازه ۷:۱۲ تا ۷:۱۵ و یا در بازه ۷:۲۷ تا ۷:۳۰ برسد تا کمتر از سه دقیقه معطل شود پس داریم:

$$P\{12 < X < 15 \cup 27 < X < 30\} = P\{12 < X < 15\} + P\{27 < X < 30\} =$$

$$\frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

مثال

- فرض کنید اتوبوس از ایستگاهی در ساعات ۷:۱۵ و ۷:۳۰ حرکن می کند. اگر زمان رسیدن شخصی به ایستگاه اتوبوس یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۷ تا ۷:۳۰ باشد احتمال آن را پیدا کنید که وی
- الف) کمتر از ۳ دقیقه معطل شود.
- ب) بیش از ۱۰ دقیقه معطل شود.
- حل:الف) در این حالت باید شخص در بازه ۷:۱۲ تا ۷:۱۵ و یا در بازه ۷:۲۷ تا ۷:۳۰ برسد تا کمتر از سه دقیقه معطل شود پس داریم:

$$P\{12 < X < 15 \;\cup 27 < X < 30\} = P\{12 < X < 15\} + P\{27 < X < 30\} =$$

$$\frac{3}{30} + \frac{3}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

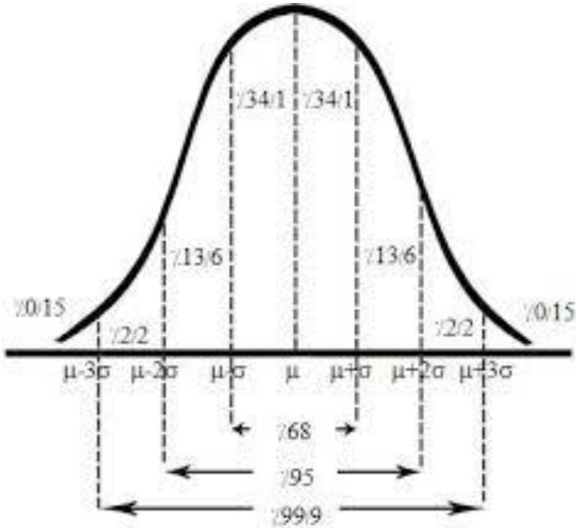
- ب) در این حالت باید شخص در بازه ۷:۰۰ تا ۷:۰۵ و یا در بازه ۷:۱۵ تا ۷:۲۰ برسد تا بیشتر از ۵ دقیقه معطل شود

$$P\{0 < X < 5 \;\cup 15 < X < 20\} = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$$

متغیر تصادفی نرمال

- تابع چگالی متغیر تصادفی نرمال ($N(\mu,\sigma^2)$)

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- نکته: محاسبه انتگرال به صورت عددی است
- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی نرمال

$$E[X]=\mu$$

$$Var(X)=\sigma^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

متغیر تصادفی نرمال استاندارد

- متغیر تصادفی نرمال Z با میانگین ۰ و واریانس ۱ را متغیر تصادفی نرمال استاندارد گوییم.

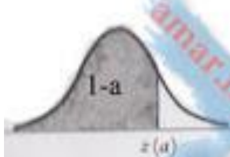
- تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \varphi(x)$$

- ویژگی های تابع $\varphi(x)$
  - محاسبات به صورت عددی
  - رابطه $\varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$
  - جدول محاسباتی

جدول محاسباتی متغیر تصادفی نرمال استاندارد

$$\varphi(1.24) = 0.8925$$



احتمالهاي تجمعي توزيع نرمال استاندارد

$P(Z<z(a)) = 1\text{-}a$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

متغیر تصادفی نرمال بر اساس متغیر تصادفی نرمال استاندارد

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ و Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد. در این صورت
  - $\frac{X-\mu}{\sigma}$ یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\}$$

$$= P\{Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\} = \varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

مثال

- اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۱۶ باشد مطلوبست محاسبه:
- الف) $P\{1<X<6\}$
- ب) $P\{|X-3|>1\}$

مثال

- اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۲ و واریانس ۱۶ باشد مطلوبست محاسبه:
- الف) P{1<X<6}
- ب) P{|X-3|>1}
- حل: $\mu=2$ و $\sigma^2=16$ ($\sigma=4$) در نتیجه
- الف:

$$P\{1< X \le 6\} = P\{\frac{1-2}{4} < \frac{X-2}{4} \le \frac{6-2}{4}\} = P\{\frac{-1}{4} < Z \le 1\}$$

$$= \varphi(1) - \varphi(-0.25) = \varphi(1) + \varphi(0.25) - 1$$

- ب

$$P\{|X-3|>1\} = P\{X-3>1\} + P\{X-3<-1\} = P\{X>4\} + P\{X<2\}$$

$$= P\{\frac{X-2}{4} > \frac{4-2}{4}\} + P\{\frac{X-2}{4} < \frac{2-2}{4}\} =$$

$$= 1 - \varphi(0.5) + \varphi(0)$$

مثال

- در یک سیستم مخابراتی دودویی، گیرنده سیگنال $R=x+Z$ را دریافت می کند (Z نرمال استاندارد). در فرستنده به جای عدد صفر عدد $x=-۲$ و به جای ۱ عدد $x=۲$ ارسال. می شود.

اگر در گیرنده با توجه به علامت R سیگنال تشخیص داده شود احتمال خطای گیرنده به شرطی که فرستنده الف) $x=2$ و ب) $x=-2$ را فرستاده باشد را محاسبه کنید.

مثال

- در یک سیستم مخابراتی دودویی، گیرنده سیگنال R=x+Z را دریافت می کند (Z نرمال استاندارد). در فرستنده به جای عدد صفر عدد x=−۲ و به جای ۱ عدد x=۲ ارسال. می شود.

اگر در گیرنده با توجه به علامت R سیگنال تشخیص داده شود احتمال خطای گیرنده به شرطی که فرستنده الف) x=2 و ب) x=-2 را فرستاده باشد را محاسبه کنید.

حل: الف

$$P\{error\_1\} = P\{R < 0 \mid x = 2\} = P\{x + Z < 0 \mid x = 2\} = P\{2 + Z < 0\}$$
$$= P\{Z < -2\} = \varphi(-2) = 1 - \varphi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ب)

$$P\{error\_0\} = P\{R > 0 \mid x = -2\} = P\{x + Z > 0 \mid x = -2\} = P\{-2 + Z > 0\}$$
$$= P\{Z > 2\} = 1 - \varphi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

تقریب متغیر تصادفی دو جمله ای با متغیر تصادفی نرمال

- اگر Sn نشان دهنده تعداد پیروزیها در n آزمایش مستقل باشد و p احتمال پیروزی در هر آزمایش باشد و n به اندازه کافی بزرگ باشد متغیر تصادفی دو جمله ای را می توان با متغیرتصادفی نرمال با میانگین و واریانس زیر تقریب زد:

$$\mu = np, \qquad \sigma^2 = np(1-p) \quad ,Y \sim N(\mu,\sigma^2)$$

- روند تقریب زدن

$$P\{a \le S_n \le b\} = P\{a - 0.5 \le Y < b + 0.5\}$$

$$= P\{\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}$$

$$= \varphi(\frac{b+0.5np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \varphi(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

تقریب متغیر تصادفی دو جمله ای با متغیر تصادفی نرمال

- چند نکته

- a,b همیشه اعداد صحیح مثبت هستند.

$$a \leq S_n \Rightarrow a - 0.5 \leq Y$$

$$a < S_n \Rightarrow a + 0.5 \leq Y$$

$$S_n \leq b \Rightarrow Y \leq b + 0.5$$

$$S_n < b \Rightarrow Y \leq b - 0.5$$

- به عنوان مثال

$$P\{S_n = a\} = P\{a - 0.5 \leq Y \leq a + 0.5\}$$

مثال

- سکه ای را ۴۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که تعداد شیرهای ظاهر شده بین ۱۹ تا ۲۱ باشد.

مثال

- سکه ای را ۴۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که تعداد شیرهای ظاهر شده بین ۱۹ تا ۲۱ باشد.
- حل
- راه حل مستقیم

$$P\{19 \le S_n \le 21\} = P\{S_n = 19\} + P\{S_n = 20\} + P\{S_n = 21\}$$

$$= \binom{40}{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \binom{40}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

مثال

- سکه ای را ۴۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که تعداد شیرهای ظاهر شده بین ۱۹ تا ۲۱ باشد.
- حل
- راه حل مستقیم

$$P\{19 \le S_n \le 21\} = P\{S_n = 19\} + P\{S_n = 20\} + P\{S_n = 21\}$$

$$= \binom{40}{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} + \binom{40}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

- راه حل تقریب متغیر نرمال

$$P\{19 \le S_n \le 21\} = P\{18.5 \le Y < 21.5\}$$

$$= P\{\frac{18.5-20}{\sqrt{10}} \le \frac{Y-20}{\sqrt{10}} < \frac{21.5-20}{\sqrt{10}}\}$$

$$= \varphi(\frac{1.5}{\sqrt{10}}) - \varphi(\frac{-1.5}{\sqrt{10}}) = 2\varphi(\frac{1.5}{\sqrt{10}}) - 1 = 2\varphi(0.47) - 1$$

$$= 2 * 0.6808 - 1 = 0.3616$$

مثال

- یک تاس را ۱۰۰۰ بار پرتاب می کنیم و تعداد ۶ ها را می شماریم. احتمال آن را پیدا کنید که این مقدار بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ باشد.

مثال

- یک تاس را ۱۰۰۰ بار پرتاب می کنیم و تعداد ۶ ها را می شماریم. احتمال آن را پیدا کنید که این مقدار بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ باشد.
- حل
- راه حل مستقیم

$$P\{150 \le S_n \le 200\} = \sum_{i=150}^{200} P\{S_n = i\} = \sum_{i=150}^{200} \binom{1000}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \left(\frac{5}{6}\right)^{1000-i}$$

- راه حل تقریب متغیر نرمال

$$P\{150 \le S_n \le 200\} = P\{150.5 \le Y < 200.5\}$$

$$= P\{\frac{150.5-\frac{1000}{6}}{\sqrt{1000(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}} \le \frac{Y-\frac{1000}{6}}{\sqrt{1000(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}} < \frac{200.5-\frac{1000}{6}}{\sqrt{1000(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}}\}$$

$$= \varphi(\frac{200.5-\frac{1000}{6}}{\sqrt{1000(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}}) - \varphi(\frac{150.5-\frac{1000}{6}}{\sqrt{1000(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}}) = \ldots$$

مثال

- یک تاس را n بار پرتاب می کنیم. n را طوری انتخاب کنید که احتمال آنکه شش های به دست امده از $n/7$ بیشتر باشد بیش از ٪۹۵ باشد

مثال

- یک تاس راn بار پرتاب می کنیم. n را طوری انتخاب کنید که احتمال آنکه شش های به دست امده از n/7 بیشتر باشد بیش از ٪۹۵ باشد
- حل: تقریب متغیر نرمال

$$P\{\frac{n}{7} \le S_n\} \approx P\{\frac{n}{7} \le Y\} = P\{\frac{\frac{n}{7}-\frac{n}{6}}{\sqrt{n(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}} \le \frac{Y-\frac{n}{6}}{\sqrt{n(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}}\}$$

$$=1-\varphi(\frac{-\frac{n}{42}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}) = \varphi(\frac{\sqrt{n}}{7\sqrt{5}}) \ge 0.95$$

مثال

- یک تاس راn بار پرتاب می کنیم. n را طوری انتخاب کنید که احتمال آنکه شش های به دست امده از n/7 بیشتر باشد بیش از ٪۹۵ باشد
- حل: تقریب متغیر نرمال

$$P\{\frac{n}{7} \le S_n\} \approx P\{\frac{n}{7} \le Y\} = P\{\frac{\frac{n}{7}-\frac{n}{6}}{\sqrt{n(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}} \le \frac{Y-\frac{n}{6}}{\sqrt{n(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})}}\}$$

$$= 1-\varphi(\frac{-\frac{n}{42}}{\sqrt{\frac{5n}{36}}}) = \varphi(\frac{\sqrt{n}}{7\sqrt{5}}) \ge 0.95$$

$$\overset{\text{جدول}}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{n}}{7\sqrt{5}} > 1.645 \Rightarrow n > 403.0.25$$

متغیر تصادفی نمایی

- تابع چگالی نمایی با پارامتر λ

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(a) = P\{X \le a\} = \int_{-\infty}^{a} f_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda a} & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

متغیر تصادفی نمایی

- تابع چگالی نمایی با پارامتر λ

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X(a)=P\{X\leq a\}=\int_{-\infty}^{a} f_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda a} & a>0\\ 0 & a<0\end{cases}$$

- محاسبه تابع مولد گشتاور

$$E[e^{tX}]=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)e^{tx}dx=\int_{0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}e^{tx}dx=\int_{0}^{\infty}\lambda e^{(t-\lambda)x}dx$$

$$=\frac{\lambda}{t-\lambda}e^{(t-\lambda)x}\Big|_0^{\infty}=\frac{-\lambda}{t-\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

امید ریاضی و واریانس

$$E[X] = \frac{dE[e^{tX}]}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\dfrac{\lambda}{\lambda - t}}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \frac{d^2E[e^{tX}]}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d\dfrac{\lambda}{(\lambda - t)^2}}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال

- مدت زمان مکالمه تلفنی بر حسب دقیقه، یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ=۰,۱ است. مطلوب است احتمال انکه
- الف) یک شخص بیش از ۵ دقیقه صحبت کند
- ب)کمتر از ۲۰ دقیقه صحبت کند.

مثال

- مدت زمان مکالمه تلفنی بر حسب دقیقه، یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ=۰,۱ است. مطلوب است احتمال انکه
- الف) یک شخص بیش از ۵ دقیقه صحبت کند
- ب)کمتر از ۲۰ دقیقه صحبت کند.
- حل:

$$P\{X>5\}=1-F_X(5)=1-(1-e^{-\frac{5}{10}})=e^{-\frac{5}{10}}$$

$$\Rightarrow P\{X<20\}=F_X(20)=1-e^{-\frac{20}{10}}=1-e^{-2}$$

متغیر تصادفی بی حافظه

- تعریف متغیر تصادفی بی حافظه

$$P\{X > s+t \mid X > t\} = P\{X > s\}$$

- متغیر تصادفی نمایی یک متغیر تصادفی بی حافظه است زیرا

$$\begin{aligned}
\Pr\{X > s+t | X > t\} &= \frac{\Pr\{X > s+t, X > t\}}{\Pr\{X > t\}} \\
&= \frac{1 - \Pr\{X \leq t+s\}}{1 - \Pr\{X \leq t\}} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda s} \\
&= \Pr\{X \geq s\}
\end{aligned}$$

مثال

- مدت زمان تعمیر یک ماشین بر حسب ساعت، یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ=۰,۵ است. مطلوب است احتمال انکه
- الف) تعمیر ماشین بیش از ۲ ساعت طول بکشد.
- ب) تعمیر ماشین بیش از ۷ساعت طول بکشد به شرط آنکه تا الان ۴ ساعت از تعمیر ماشین گذشته باشد .

مثال

- مدت زمان تعمیر یک ماشین بر حسب ساعت، یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ=۰,۵ است. مطلوب است احتمال انکه
- الف) تعمیر ماشین بیش از ۲ ساعت طول بکشد.
- ب) تعمیر ماشین بیش از ۷ساعت طول بکشد به شرط آنکه تا الان ۴ ساعت از تعمیر ماشین گذشته باشد .
- حل: الف)

$$P\{X>2\}=1-F_X(2)=1-(1-e^{-2*0.5})=e^{-1}$$

- ب)

$$P\{X>7\mid X>4\}\overset{\text{بیحافظه}}{=}P\{X>3\}=$$

$$1-F_X(3)=1-(1-e^{-3*0.5})=e^{-1.5}$$

توزیع یک تابع از متغیر تصادفی

- در برخی موارد تابع چگالی از یک متغیر تصادفی مانند X را داریم و می خواهیم تابع چگالی تابعی از آن متغیر تصادفی مانند g(X) را به دست آوریم:

- مراحل
- محاسبه $F_Y(y)$ بر اساس احتمال متغیر تصادفی X

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{g(X) < y\}$$

- مشتق از $F_Y(y)$ برای محاسبه تابع چگالی احتمال

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_X(x)$ باشد. تابع چگالی $Y=X^2$ را به دست آورید.

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_X(x)$ باشد. تابع چگالی $Y=X^2$ را به دست آورید.
- حل: برای $y>0$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{X^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\}$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

- با مشتق گرفتن داریم:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))}{dy}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی نمایی با پارامتر λ باشد. تابع چگالی $Y=\frac{1}{1+X}$ را به دست آورید.

مثال

- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی نمایی با پارامتر λ باشد. تابع چگالی $Y=\frac{1}{1+X}$ را به دست آورید.
- حل:

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{\frac{1}{1+X}<y\}=P\{\frac{1}{y}-1<X\}=1-F_X(\frac{1}{y}-1)$$

- با مشتق گرفتن داریم:

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{d(1-F_X(\frac{1}{y}-1))}{dy}$$

$$=\frac{1}{y^2}(f_X(\frac{1}{y}-1))=\begin{cases}\frac{1}{y^2}e^{\lambda(\frac{1}{y}-1)} & \frac{1}{y}-1>0\\ 0 & \frac{1}{y}-1<0\end{cases}$$

رابطه کلی برای Y=g(X)

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy} & y = g(x) \\ 0 & y \neq g(x) \end{cases}$$

سپاس